

## 孟德爾實驗數據的正確性---卡方檢定統計量

王澄祥 ( 應數博 94 )

在孟德爾 ( Gregor Johann Mendel, 1822-1884, 現代遺傳學之父 ) 眾多有名的實驗中，有個實驗是將 556 個種子外型平滑、呈黃色 ( 兩種顯性性狀 ) 的雄性豌豆，與種子外型皺摺、呈綠色 ( 兩種隱性性狀 ) 的雌性豌豆做交配。由於顯性性狀：隱性性狀 = 3：1，子代性狀的相對頻率可以下表呈現：

種皮顏色 \ 種皮形狀	平滑(顯)	皺摺(隱)
黃色(顯)	$p_1 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$	$p_3 = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$
綠色(隱)	$p_2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$	$p_4 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

其中  $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ 。根據孟德爾觀察到的子代數量，以及各種性狀期望數量整理如下：

種皮顏色 \ 種皮形狀	平滑(顯)	皺摺(隱)
黃色(顯)	$O_1 = 315$ $(E_1 = 312.75)$	$O_3 = 102$ $(E_3 = 104.25)$
綠色(隱)	$O_2 = 108$ $(E_2 = 104.25)$	$O_4 = 31$ $(E_4 = 34.75)$

其中  $O_i, i=1, \dots, 4$  為孟德爾觀察到該種性狀的子代數量， $E_i, i=1, \dots, 4$  為期望的子代數量，例如：對於平滑、黃色的子代，既然其頻率為  $p_1 = \frac{9}{16}$ ，而子代總數為  $n = 556$ ，所以期望出現平滑、黃色性狀的子代數即為  $E_1 = n \times p_1 = 312.75$ 。考慮以下假設

$H_0$ : 資料的型態具有總數為  $n = 556$  且  $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (\frac{9}{16}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{16})$  的多項分佈

versus

$H_1$ : 資料的型態不為上述之多項分佈

則根據最佳概似比檢定 ( likelihood ratio test, 參考文獻一 ), 計算由皮爾森 ( Karl Pearson, 1857 -1936 ) 提出的卡方檢定統計量 ( Pearson's chi-square statistic ), 可得到

$$-2 \log \Lambda = 2 \sum_{i=1}^4 O_i \log \left( \frac{O_i}{E_i} \right) \doteq 0.618$$

此統計量應具有自由度 3 的卡方分佈 ( $\chi_3^2$ )。又,  $\chi_3^2$  之 90% 百分位數 ( quantile ) 為 0.584, 表示在自由度三的卡方分佈之下, 統計量值大於 0.584 的機率超過 90%。若以機率值 ( P-value ) 來說, 上述統計量值 0.618 在自由度三的卡方分佈下, 可算得機率值大約為 0.8922, 此機率值稍微低於 0.9 的顯著水準 ( significant level ), 但不明顯, 所以在此顯著水準下, 我們並無明顯的證據去拒絕虛無假設 ( null hypothesis, 即  $H_0$  )。除非顯著水準降低, 我們才有機會拒絕虛無假設。

費雪 ( Sir Ronald Aylmer Fisher, 1890 -1962, 英國統計學家、演化生物學家與遺傳學家 ) 將孟德爾的實驗數據做了不同的分析: 若有兩群獨立的實驗數據, 分別計算卡方檢定統計量, 其自由度分別為  $\nu_1$  與  $\nu_2$ , 則在「資料為多項分佈」的假設下, 兩個獨立的卡方檢定統計量的和仍會具有卡方分佈, 且自由度為  $\nu_1 + \nu_2$ 。費雪於是將孟德爾所做的幾個獨立實驗, 分別計算「由卡爾·皮爾森所提出的」( 讀者有興趣可以參考文獻三便知為何強調這點 ) 卡方檢定統計量, 將這些統計量加總後對照相同自由度的卡方分佈, 算得機率值竟高達 0.99996, 意味著孟德爾實驗所得的數據相當符合虛無假設的多項分佈模型, 換句話說, 實驗 10,000 次, 只有 4 次會不符合多項分佈的假設! 比較合理的推測是: 孟德爾一直重複實驗, 直到顯示的結果符合模型的假設才停止。

事實上, 孟德爾並非唯一得到太符合模型假設的科學家: 西里爾·伯特爵士 ( Sir Cyril Lodowic Burt, 1883 - 1971, 英國教育心理學家, 第一位被授勳的英國心理學家 ) 比較有名的研究是一篇關於 40,000 對父子智力與職業研究。多爾夫曼 ( Josif Dorfman, 1978, 烏克蘭與法國棋類專家 ) 利用皮爾森的卡方檢定統計量, 以常態分佈 ( normal distribution ) 來配適伯特爵士的實驗數據, 發現父親與兒子的智力分數符合常態分佈的程度, 其機率值竟高達  $1 - 10^{-7}$  與  $1 - 10^{-6}$ 。於是多爾夫曼當時便說: 伯特爵士的數據大概是當時為止, 在人類測量學中, 最符合常態分佈的資料吧!

## 參考文獻

- 一、Casella, G. and R.L. Berger, "Statistical Inference, Second Edition." Pacific Grove, CA: Duxbury Press, 2002.
- 二、Fisher, R. A., 1936, "Has Mendel's work been rediscovered?" *Annals of Science*. 1:115-137.
- 三、葉偉文譯, David Salsburg 原著, 2001年11月。《統計, 改變了世界》, 天下遠見出版股份有限公司, 台北。
- 四、Wikipedia, the free encyclopedia [http://en.wikipedia.org/wiki/Main\\_Page](http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page)。