

# 這種生意可以做嗎？

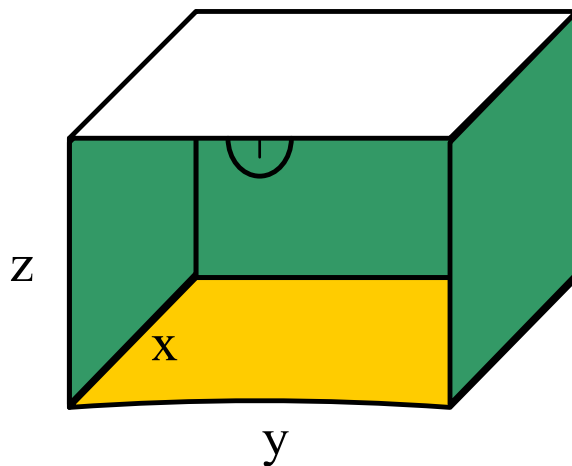
## (微分、極值問題)

趙怡茹(應數博 96)

有個非常非常有錢的老先生，有錢到認為只要用錢就能夠買到他想要的東西，他也花盡心思要與其他人不一樣，這樣才能突顯出他的特別。

有一天，他突發奇想，想把他所喜愛的東西全部放在一個特別的珠寶盒中。這個珠寶盒有多特別呢！他希望這個珠寶盒的底部用黃金打造，四周用瑪瑙石圍繞，上層用珍珠做成，而且能裝得下 100 立方公分的東西。因此他找了一個工匠要工匠一定要做出來，而且跟他說你做出來後我給你 100 萬。那工匠就想了想，現在黃金的市價是每平方公分要價 20000 元、瑪瑙石市價是每平方公分要價 5000 元、珍珠市價是每平方公分要價 7000 元，他就算不算手工費好了，那他做出來後 100 萬合不成本阿？所以他就先用手計算一下，看這樣做出來的東西最少應該要花多少錢？

下面是工匠要做出珠寶盒的草圖，



由於這個富翁只要求容積 100 立方公分，其餘的都不要。因此，我們假設長、寬、高各為  $x$  cm、 $y$  cm、 $z$  cm，則有  $xyz = 100$ 。

再來，我們將全部所需的金額列出：

1. 底邊用黃金  $\rightarrow 20000 \times xy$
2. 四周用瑪瑙  $\rightarrow 5000 \times (2yz + 2xz)$
3. 上層用珍珠  $\rightarrow 7000 \times xy$

所以總共所要花的金額為  $27000xy + 1000000\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ 。

那這個工匠一定這樣想”我只要有做到富翁的條件，花的錢當然越少越好！”。

因此我們將金額設為目標函數  $f(x, y) = 27000xy + 1000000(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})$  後，就變成求

$f(x, y)$  的最小值。並且最小值又發生在  $\frac{\partial}{\partial x} f = 0$  及  $\frac{\partial}{\partial y} f = 0$  的時候，所以我們來

幫忙工匠算一下偏導函數吧！

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 27000y - \frac{10^6}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 27000x - \frac{10^6}{y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = \frac{10}{3} \end{cases}$$

再由  $xyz = 100$  可以得出  $z = 9$ 。

我們幫工匠算出他想要花最少的錢做出的盒子的大小了！那我們再幫他一個忙，算出最終的金額，來看富翁給的 100 萬夠不夠。

$$f\left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right) = 27000 \times \frac{10}{3} \times \frac{10}{3} + 10^6 \times \left(\frac{3}{10} + \frac{3}{10}\right) = 90 \text{萬}$$

做好這個盒子他只需要花 90 萬，富翁卻給了 100 萬，那麼對工匠來說是可以接受這個任務的，他反倒賺了一筆！

[參考資料]

1. “微積分之倚天寶劍”，亞當斯、哈斯、湯普森 / 著，師明睿 / 譯