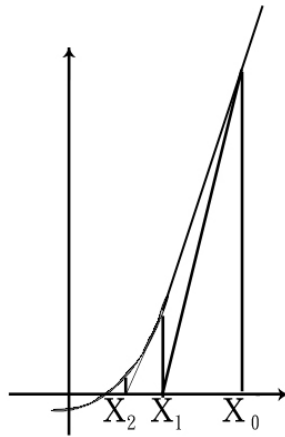


根號計算

平常在生活中，有很多的機會與數學打交道，舉凡採買東西、上網、旅行…等等，偶爾會有些時候，它並不能全用我們所熟悉的整數來詮釋，甚至不能用有理數來表達，此時，就會使用到比較特別的無理數，例如 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 等，但他實際的數字是多少呢？在過去，是用計算機去進行根號的計算，例如： $\sqrt{2}$ 。但是其實我們可以使用數值方法（例如：牛頓法）來逼近它的值，而它即為 $x^2 - 2 = 0$ 的根，牛頓法可以拿來計算此方程式的根。就我們所知，線性方程式和二次曲線方程式都可以直接帶入公式得到我們要的解，但是超過三次以上的方程式或是含有三角函數、指數函數和對數函數…等等的函數的時候，通常是無法帶入公式解的，所以我們可以利用牛頓法去逼近。

牛頓法

1. $f(x)$ 的一次導函數(微分)需要存在。
2. 先選取一個初始值 x_0 ，在 $f(x)$ 上選取一點 x_0 則其對應的值為 $f(x_0)$ 。
3. 求過 $f(x_0)$ 的切線直線方程式。
4. 切線方程式的斜率為 $m=f'(x_0)$ 。
5. 已知一點和斜率，則可算出直線方程式 $y=mx+k$ 。



6. 就可以推出 $x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ ，把求出的 x 當做 x_1 ，一直重複上面的步驟，我們可以推導出通式 $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ ， $i=0, 1, 2$ 。
7. 設定誤差小於多少的時候停止疊代，其值會很接近解。

舉例： $x = \sqrt{2}$

我們以 $x^2 - 2 = 0$ 為例，想求取這二次方程式的根。

用牛頓法去計算它的根。

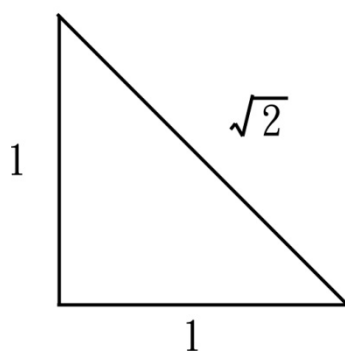
選擇初始值 $x_0 = 1$ ，設定當 $f(x_i) < 10^{-6}$ 時停止疊代。

以下為牛頓法計算的結果

估計值	X 值
x_0	1
x_1	1.2500
x_2	1.3594

x_3	1.3974
x_4	1.4092
x_5	1.4127
x_6	1.4138
x_7	1.4141
x_8	1.4142
x_9	1.4142
x_{10}	1.4142

所以疊代 10 次之後，它的誤差就小於 10^{-6} 了，所以它會逼近 $\sqrt{2}$ 。
 而取根號本身亦有它的用意，有些數沒有辦法用有理數來表示，故需要以這樣的方式來表示，舉例來說，日常生活裡最常見的無理數，即為等腰三角形的斜邊。



一個等腰三角形的三個邊，若兩股的長度為 1，則斜邊的長度即為

$\sqrt{2}$ 。

參考資料：

數值方法入門 一使用 C 語言一 陳世芳 陳昭綾 著