國立中山大學107學年度寒假轉學考招生考試試題

科目名稱：微積分【應數系二年級】 題號：724001

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機 共1頁第1頁

1. (10%) 如果連續函數 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在點 c 處取得其最大值；即有

$$f(x)\le f(c),\quad \forall x\in[a,b].$$

試證明：c 滿足以下條件之一：(a) $f'(c)=0$, (b) $f'(c)$ 不存在, 或 (c) $c=a$ 或 $c=b$.

2. (10%) 在一次實驗中, 測量某物的重量 n 次, 得數據 $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$. 若數值 x 與這 n 個測量值的差的平方和為最小, 則稱 x 為"最可能的"值; 求此次實驗所得之最可能的值. (提示: 這相當於求 $f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$ 的最小值點.)

3. (10%) (a) 令 $a>0$ 為常數, 求證極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$.

(10%) (b) 求證函數 $f(x)=e^x$ 等於其泰勒級數 (Taylor series), 即

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\quad \forall x\in(-\infty,+\infty).$$

4. (10%) 找出函數 $f(x)=\dfrac{2+x-x^2}{|x+4|}$ 圖形的極大/小點, 反曲點, 水平漸近線, 垂直漸近線, 及\或傾斜漸近線. 並描出曲線 $y=f(x)$ 的圖形.

5. (10%) 計算由下列曲線所圍成的圖形, 繞 x-軸旋轉所得的旋轉體的體積及其側面積.

$$y=x^2,\quad y=\sqrt{x}.$$

6. (20%) 考慮以下之極值問題:

$$\min\quad z=x^2+2xy+w^2,$$

其中限制條件如下

$$2x+y+3w=24,\quad x+w=8.$$

試以拉格朗日乘子法解之.

7. (20%) 計算迴路積分

$$I=\oint_L(x+y)ds.$$

其中 L 為三角形 $\triangle OAB$ 的三條有向邊 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{BO}$. 這裡, 三個角點分別是 $O=(0,0)$, $A=(1,0)$ 和 $B=(0,1)$.