應數碩95 羅琳峰

凡事都穩定嗎?

在食物鏈複雜的環境中，生物間都存在著捕食、依偎的關係，生物數量隨著時間消長，最後整個生態在不受突如外力因素而趨於穩定性，這就是所謂生態穩定性。然而這種狀況也發生在人類社會行為裡，在此我們就來探討人類遷徙問題。

在此運用到***線性代數***中的***馬可夫鏈(Markov Chains)***來預測都市人口最終的穩定狀態(stable state)。首先，介紹**矩陣的極限**:

假設$A_1, A_2, \ldots \in F^{m\times n}$, $L\in F^{m\times n}$, 若$\lim_{x\to\infty}(A_k)_{ij}=(L)_{ij}$存在, $\forall 1\le i\le m$, $1\le j\le n$, 則稱$\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$的矩陣極限存在且收斂到L 。

再來簡單介紹馬可夫鏈中的隨機過程、馬可夫過程:

(1) 一個隨機過程為一些狀態的序列，其中任一狀態的產生可能與之前的狀態有關。

(2) 一個馬可夫過程遵守:每個狀態會發生的機率只與前一個狀態有關。

範例:

每年將近有 3/10 的高雄縣人口移入高雄市，而且也將近有 2/10 的高雄市民移到高雄縣，當以這樣的比例模式進行，最終高雄市民與

高雄縣民的人口比例將會是多少?

解析:

令I_n表示第 n 年高雄市人口數，O_n表示第 n 年高雄縣人口數，

則$\begin{cases} I_n = I_{n-1} - 0.2I_{n-1} + 0.3O_{n-1} = 0.8I_{n-1} + 0.3O_{n-1} \\ O_n = O_{n-1} - 0.3O_{n-1} + 0.2I_{n-1} = 0.7O_{n-1} + 0.2I_{n-1} \end{cases}$，

即$\begin{bmatrix} I_n \\ O_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.7 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-1} \\ O_{n-1} \end{bmatrix}$。

令$X_n = \begin{bmatrix} I_n \\ O_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.7 & 0.2 \end{bmatrix}$,則$X_n = AX_{n\text{-}1}, n \geq 1$。

當時間夠久時，$\lim_{x \to \infty} X_n = \overline{X} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lim_{x \to \infty} AX_{n-1} = A\lim_{x \to \infty} X_{n-1}$,

$\Rightarrow \overline{X} = A\overline{X}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.7 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{a}{b} \doteq 1.31$

所以當時間夠久時，高雄市民與高雄縣民的人口比例為 1.31。

參考書目:

1. W.Keith Nicholson,*Linear Algebra with Applications 4th Ed.*, International Edition,pp.82-89,2002.

2. J.T.Scheick, *Linear Algebra with Applications*, International series in pure and applied mathematics, pp.210-213.1997.