

彩券買一張夠嗎？—期望值與大數法則

李幸娟(應數博 96)

自從台灣有了樂透公益彩券以來,到 2006 年為止,至少已經生產出 186 位億萬富翁,您羨慕嗎?成為億萬富翁可是多數人的夢想呢!那麼如何以期望值及大數法則的概念來決定”至少買幾張彩券就可以擁有最大的夢想?”首先,彩券的模型大致相似,為簡化我們的問題,使讀者易於了解,我們以原始的美國紐約彩券作為說明的範例:每賣出一百萬張彩券,紐約彩券就提出以下彩金

彩金額度	50000 美元	5000 美元	500 美元	50 美元
彩金名額	1 名	9 名	90 名	900 名

註:資料來源[1]

如果我們買一張彩券,贏得 50000 美元的機會為百萬分之一,贏得 5000 美元的機會為百萬分之九,以此類推,在一百萬張彩券中共有一千張中獎彩券,那麼沒中獎的機會則為 $1 - 1000/1000000 = 999000/1000000$,因此可算出購買一張彩券中獎後所得彩金的期望值為:

$$50000 \times (1/1000000) + 5000 \times (9/1000000) + 500 \times (90/1000000) + 50 \times (900/1000000) = 0.185 \text{ 美元} = 18.5 \text{ 分美金}$$

註:期望值(expected value)

有數值結果的隨機現象之期望值,是每一個數值結果乘上它發生的機率加總而得之數值,代表平均每一次隨機試驗所得之數值。

若每張紐約彩券售價 0.5 美元即 50 分美金,預期可回收美金 18.5 分,可想而知每買一張彩券,平均會損失 31.5 分(顯然損失的部分可能去作社會公益或支付彩券成本),但彩券為何不買 2 張以上呢?是不是買越多希望越大呢?那可不,根據機率論之**大數法則**(law of large numbers)”如果有數值結果的隨機現象獨立地重複許多次,實際觀測到的結果之平均值會趨近期望值。”因此,如果我們買 n 張彩券將可能會損失 $(31.5 \times n)$ 分美金, $n \geq 1$ (每張損失 31.5 分),可知買越多張,若不中獎,損失可會越多呢!當然您為增進社會福利而貢獻就另當別論了。

結論是”彩券買一張就夠了!!”以紐約彩券為例,18.5 分美金是期望值,31.5 分美金可就是中獎樂趣了。最後預祝大家美夢成真中大獎了。另外附上台灣大樂透的中獎彩金配額及機會表(附錄一),供有心人士算一算成為億萬富翁的期望值到底有多大呢!

另一方面大數法則也能解釋了以下兩個個案。

1. 賭場經營是一門生意而不是在賭博：大量客人平均贏的錢會很接近期望值，而莊家老早就算好了期望值，並且知道長期下來，這門生意會賺多少錢。
2. 人壽保險公司的運作很像賭場—賭被保險人會不會死亡：依據死亡率，預測出必須給付的理賠金期望值，然後訂出保費來保障其公司之利潤。

參考資料：

- [1] 什麼是機率 大村平著 張輝煌譯 建興出版社 1995.7
- [2] 瘋狂大樂透 黃文璋 數學傳播 29卷1期 民國94年3月
- [3] 統計讓數學說話 墨雨著 鄭惟厚譯 天下文化

附錄一：

a：大樂透投注總額

A：總獎金為投注總額的57% 即 $A=57\% \times a$

B：頭獎至伍獎的總彩金

$B = 57\% \times a - (\text{陸獎總彩金} + \text{普獎總彩金})$

$= 57\% \times a - (1000 \times (\text{陸獎中獎注數}x_1) + 400 \times (\text{普獎中獎注數}x_2))$

獎項	彩金分配總額	中獎機會
頭獎	$56\% \times B$	$1/C_6^{49} = 1/13,983,816$
貳獎	$9\% \times B$	$C_5^6/C_6^{49} = 6/13,983,816 = 1/2,330,636$
參獎	$10\% \times B$	$C_5^6 C_1^{42}/C_6^{49} = 252/13,983,816 \approx 1/55,491.3$
肆獎	$5\% \times B$	$C_4^6 C_1^{42}/C_6^{49} = 630/13,983,816 \approx 1/22,196.5$
伍獎	$20\% \times B$	$C_4^6 C_2^{42}/C_6^{49} = 12915/13,983,816 \approx 1/1,082.8$
陸獎	$1000 \times x_1$	$C_3^6 C_2^{42}/C_6^{49} = 17220/13,983,816 \approx 1/812.1$
普獎	$400 \times x_2$	$C_3^6 C_3^{42}/C_6^{49} = 229600/13,983,816 \approx 1/60.9$
總和	A	1.0

資料來源：[2]