變數代換

洪宛頻(應數博92)

本單元介紹變數代換的概念，其內容主要取材自黃文璋(2003a)第二章第六節，及黃文璋(2003b)第一章第五節、第三章第三節。 同時提供一些相關例題，輔以闡述概念。例題取自黃文璋(2003a)第二章習題。

詳細內容可參閱下列網站 http://www.math.nuk.edu.tw/cbme/cbme.htm。

對一隨機變數 X，有時我們會想知道它的一個函數 $Y=g(X)$ 的行為。Y便稱為 X 之變數代換(change of variable)。Y 仍為一隨機變數。通常 X 的分佈知道，而因 Y 的值是由 X 的值所決定，故 Y 的分佈，可由所給之 X 的分佈來決定。

對每一實數的子集合 A,

$$P(Y \in A)=P(g(X) \in A)=P(X \in g^{-1}(A))。 \tag{1}$$

在此

$$g^{-1}(A))=\{x|x \in R, g(x) \in A\}。$$

對於新的隨機變數 Y，由(1)式，欲求 Y 落在某一集合 A 之機率，仍要回到關於 X 的機率。但若我們求出 Y的分佈函數，當然就可以不用理會 X 了。

若 X 為離散型的隨機變數，則 $Y=g(X)$ 的機率密度函數，只要留意由 X 至 Y 的變換是否為 $1-1$(等價於 g 是否為嚴格單調函數)，則藉由(1)式，通常可很快地得到。

底下給出兩個變數代換的定理。

定理 1. 設隨機變數 X 之分佈函數為 F_X，機率密度函數為 f_X。令 $Y=g(X)$, Y 之分佈函數以 F_Y 表之。又令

$$\Omega_1=\{x|f_X(x)>0\}, \tag{2}$$

$$\Omega_2=\{y|存在x \in \Omega_1, 使得y=g(x)\}。 \tag{3}$$

(i) 若 g 在 Ω_1 為嚴格漸增函數，則 $F_Y(y)=F_X(g^{-1}(y)), \forall y \in \Omega_2$;

(ii) 若 g 在 Ω_1 為嚴格漸減函數， 則 $F_Y(y)=1-F_X(g^{-1}(y)-), \forall y \in \Omega_2$。

定理 2. 設隨機變數 X 之p.d.f.為 f_X。令 $Y=g(X)$，其中 g 為一嚴格單調函數，Ω_1 及 Ω_2 分別定義在(2)及(3)式中。 設 f_X 在 Ω_1 連續，且 g^{-1} 在 Ω_2 有一連續的導數，則 Y 之p.d.f.為

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|, y \in \Omega_2, \tag{4}$$

且 $f_Y(y)=0,\, y \notin \Omega_2$。

有時我們會對 X, Y 的二函數, 如

$$U = g_1(X,Y), \tag{5}$$

$$V = g_2(X,Y), \tag{6}$$

有興趣。如果令 $A=\{(x,y)|f(x,y)>0\}$，其中 $f(x,y)$ 為 X,Y 之聯合p.d.f., $B=\{(u,v)|u=g_1(x,y), v=g_2(x,y), (x,y)\in A\}$。 則 (U,V) 便是由 A 映至 B 之一變數代換。 有時也可能只對一個函數 $W=g(X,Y)$ 有興趣。這兩種情況都屬於兩個變數的變數代換。

設由 (X,Y) 經由(5)及(6)式變換至 (U,V)。 若由(5)及(6)式可解出唯一的 $X=h_1(U,V)$, $Y=h_2(U,V)$, 則我們說由 (X,Y) 至 (U,V) 的變換，為 $1-1$。此時有

$$u=g_1(x,y), v=g_2(x,y) \Leftrightarrow x=h_1(u,v), y=h_2(u,v)。 \tag{7}$$

例如，設

$$U = X+Y, \quad V = X-Y,$$

則

$$X = \frac{1}{2}(U+V) = h_1(U,V), \quad Y = \frac{1}{2}(U-V) = h_2(U,V)。$$

故 (X,Y) 至 (U,V) 為 $1-1$ 變換。另外，設 X, Y為二正的隨機變數，且令

$$U = XY, \quad V = X/Y,$$

則

$$X = (UV)^{1/2} = h_1(U,V), \quad Y = (U/V)^{1/2} = h_2(U,V),$$

因此 (X, Y) 至 (U, V) 仍為$1-1$變換。

若 (X, Y) 為離散型的隨機向量，以 $f(x, y)$ 為聯合p.d.f.。 則由(7)式, (U, V) 之聯合p.d.f.為

$$f_{U,V}(u, v) = f(h_1(u, v), h_2(u, v))。 \tag{8}$$

此因

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= P(g_1(X, Y) = u, g_2(X, Y) = v) \\ &= P(X = h_1(u, v), Y = h_2(u, v)) \\ &= f(h_1(u, v), h_2(u, v))。 \end{aligned}$$

若 (X, Y) 為連續型的隨機向量，仍以 $f(x, y)$ 為其聯合p.d.f., 則 (U, V) 之聯合p.d.f.，可如單變數的情況得到。即

$$f_{U,V}(u, v) = |J(u, v)| f(h_1(u, v), h_2(u, v)), \tag{9}$$

其中

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \tag{10}$$

而

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{\partial h_1(u, v)}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial h_1(u, v)}{\partial v}, \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= \frac{\partial h_2(u, v)}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial h_2(u, v)}{\partial v}。 \end{aligned}$$

J 稱為變換 $x = h_1(u, v)$, $y = h_2(u, v)$ 之**雅可彬**(Jacobian)。

例 1. 設 X有 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$分佈。試求 $Y = |X|$之分佈及 $E(Y)$。

解.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) \\ &= P(X \leq y) - P(X \leq -y) = F_X(y) - F_X(-y) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{d}{dy}F_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\}, \quad y > 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \int_0^\infty y f_Y(y)dy = \int_0^\infty \frac{2y}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\}dy \quad \text{let } u = y^2 \Rightarrow du = 2ydy \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{u}{2\sigma^2}\}du = -\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{u}{2\sigma^2}\}|_0^\infty \\
&= \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\pi}}
\end{aligned}
$$

例 2. 設 X 有 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 分佈, 令 $Y = e^X$。試求Y之分佈此分佈即對數常態分佈(lognormal distribution)。

解.

$$
Y = e^X \Rightarrow x = \log y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}
$$

$$
f_Y(y) = f_X(\log y)|\frac{dx}{dy}| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y}\exp\{-\frac{(\log y - \mu)^2}{2\sigma^2}\}, \quad y > 0
$$

例 3. 設 X_1, X_2, X_3 為 i.i.d. 之 $\mathcal{U}(0,1)$ r.v.'s。試求 $Z = X_1 + X_2 + X_3$之 p.d.f., 並求 $P(Z \leq 2)$。

解. $X_1,\, X_2 \overset{i.i.d.}{\sim} U(0,1)$

$$
\begin{cases} Y_1 = X_1 + X_2 \\ Y_2 = X_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = Y_2 \\ X_2 = Y_1 - Y_2 \end{cases} \text{ and } J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1
$$

$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1}(y_2)f_{X_2}(y_1 - y_2) = 1,\ 0 < y_2 < 1,\ 0 < y_1 - y_2 < 1.$

$$
f_{Y_1}(y_1) = \begin{cases} \int_0^{y_1} f_{X_1}(y_2)f_{X_2}(y_1 - y_2)dy_2 & ,0 \leq y_1 < 1 \\ \int_{y_1-1}^1 f_{X_1}(y_2)f_{X_2}(y_1 - y_2)dy_2 & ,1 \leq y_1 < 2 \end{cases} = \begin{cases} y_1 & ,0 \leq y_1 < 1 \\ 2 - y_1 & ,1 \leq y_1 < 2 \end{cases}
$$

It can be derived that the p.d.f. of $Y = X_1 + X_2$ is

$$
f_Y(y) = \begin{cases} y & ,0 \leq y < 1 \\ 2 - y & ,1 \leq y < 2 \end{cases} \Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}y^2 & ,0 \leq y < 1 \\ 2y - \frac{1}{2}y^2 - 1 & ,1 \leq y < 2 \end{cases}
$$

$Z = X_1 + X_2 + X_3 = Y + X_3$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^z y dy & ,0 < z < 1 \\ \int_{z-1}^1 y \cdot 1dy + \int_1^z (2-y) \cdot 1dy & ,1 < z < 2 \\ \int_{z-1}^2 (2-y) \cdot 1dy & ,2 < z < 3 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}z^2 & ,0 < z < 1 \\ 3z - z^2 - \frac{3}{2} & ,1 < z < 2 \\ \frac{1}{2}z^2 - 3z + \frac{9}{2} & ,2 < z < 3 \end{cases}$$

$P(Z \le z) = P(X_1 + X_2 + X_3 \le z) = \int_0^1 P(X_1 + X_2 \le z - x)dx = \int_0^1 F_Y(z-x)dx$

Case (i) $0 \le z < 1$

$P(Z \le z) = \int_0^z \frac{1}{2}(z-x)^2 dx = \frac{1}{6}z^3$

Case (ii) $1 \le z < 2$

$P(Z \le z) = \int_0^{z-1} \left(2(z-x) - \frac{1}{2}(z-x)^2 - 1\right) dx + \int_{z-1}^1 \frac{1}{2}(z-x)^2 dx = \frac{3}{2}z^2 - \frac{3}{2}z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{2}$

Case (iii) $2 \le z < 3$

$P(Z \le z) = \int_0^{z-2} 1dx + \int_{z-2}^1 \left(2(z-x) - \frac{1}{2}(z-x)^2 - 1\right) dx = \frac{9}{2}z - \frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 - \frac{7}{2}$

$\therefore P(Z \le 2) = 9 - 6 + \frac{8}{6} - \frac{7}{2} = \frac{18+8-21}{6} = \frac{5}{6}$

例 4. 設 U, V為二獨立的 r.v.'s, 且 U有 Rayleigh分佈, p.d.f.為

$$f_U(u) = \begin{cases} \sigma^{-2} u e^{-u^2/2\sigma^2}, & u \ge 0, \\ 0, & u < 0, \end{cases}$$

V有 $\mathcal{U}(-\pi, \pi)$分佈。試證 $X = U\cos V$及 $Y = U\sin V$為二獨立的 r.v.'s, 且皆有 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$的分佈。

解.

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u \sin v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \sqrt{x^2+y^2} \\ x_2 = \tan^{-1}\frac{y}{x} \end{cases}$$

and

$$J = \begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} u \exp\{-\frac{u^2}{2\sigma^2}\}, u \ge 0, -\pi < v < \pi$$

$$
\begin{aligned}
f_{X,Y}(x,y) &= f_{U,V}(\sqrt{x^2+y^2}, \tan^{-1}\frac{y}{x})|J| \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\}, -\infty < x, y < \infty
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\}dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\}dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\}, -\infty < x < \infty
\end{aligned}
$$

Similarly,

$$
f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\}, -\infty < y < \infty
$$

參考資料

1. 黃文璋(2003a). 機率論。華泰文化事業公司，台北。

2. 黃文璋(2003b). 數理統計。華泰文化事業公司，台北。