利用的定理: Lapalce 方程式解的定義

我們來看複變函數論在熱力學中的應用, 我們知道一個均勻材料物體內的熱傳導是由熱方程式決定

$$T_t = k^2 \nabla^2 T,$$

其中 T 是溫度, T_t 是 T 對時間的偏微分. k^2 是一個正的常數. (其數值依照物體的材料而定) 如果該問題是穩定的(也就是說溫度不隨著時間而改變), 且是平面上的二維問題, 此熱方程式可以簡化到二維空間的 Laplace 方程式決定 $\nabla^2 T = T_{xx} + T_{yy} = 0.$

其中 $T(x, y)$ 是熱位能且可爲複數位能 $P(z) = P(x, y)$ 的實部 $P(z) = P(x, y) = T(x, y) + iQ(x, y)$, 在特別情況下, 當 $T(x, y)$ 是一個常數時, 我們稱 $T(x, y)$ 爲等溫線, $Q(x, y)$ 是常數時, 我們稱 $Q(x, y)$ 爲熱流線, 熱量會沿著此曲線由高溫處流往低溫處.

問題: 兩個同軸的圓柱筒半徑分別爲 20 公分與 100 公分, 在其之間的區域分別盛水, 外圓柱筒保持 50 度, 如果要使離軸心 50 公分處的溫度爲 30 度, 請問內圓柱筒要多少度?

答案: 因爲 T 是 Laplace 方程式的解 $\nabla^2 T = 0.$ 利用極座標轉換, 我們得到 Laplace 方程式爲 $rT''+T'=0$, 將變數分離 $\frac{T''}{T'} = -\frac{1}{r}$ 並積分它得到 $\ln T'(r) = -\ln r + C$, 所以 $T'(r) = \frac{C}{r}$, $T(r) = C\ln r + D$, C, D 是常數. 代入邊界值條件 $T(100) = 50 = C\ln 100 + D$ 和 $T(50) = 30 = C\ln 50 + D$ 後, 我們可以利用兩式相減分別得到 $C = \frac{20}{\ln 2}$ 再代入其中一式得到 $D = 50 - 20\frac{\ln 100}{\ln 2}$.

所以我們得到 $T(r) = 20\frac{\ln r}{\ln 2} + 50 - 20\frac{\ln 100}{\ln 2}$. 代入內圓柱筒的邊界值後, 我們得到答案 $T(20) = 20\frac{\ln 20}{\ln 2} + 50 - 20\frac{\ln 100}{\ln 2}$.

如果將此熱傳導問題改成靜電力場的問題也是可以的, 只要將兩個圓柱筒換成兩個帶靜電圓柱體, 熱能(溫度)改成靜電位能, 很清楚的, 我們可以看出其中的解法是一樣的, 當然, 在此題型中, 因爲溫度只有實數, 所以我們只需用到實數的結構, 而不需要複數, 但是靜電力場可以爲複數場, 平面上的流體力學有兩個方向, 所以也需要複數場, 我們看到複數分析在實際應用上面, 數學結構的一致性.

參考書目:

1.高等數學教材第三卷第二分冊複變函數論 V.I. Smirnov 原著凡異數學譯.
2. Advanced Engineering Mathematics, Erwin Kreyszig 格致圖書公司.
3.高等工程數學及習題詳解(第七版)曉原出版社.
4. Complex analysis, Serge Lang, New York :Springer-Verlag,c1985.
5. Complex analysis, Theodore W. Gamelin, New York :Springer,c2001.