利用的定理: 複變數值的定義

我們來看複變函數論在流體力學中的應用，我們考慮一個二維平面穩定移動且沒有黏滯性的流體，所謂二維平面指的是所有平面上的移動完全一致，其流體的速度平行於此平面，穩定移動是指其速度不隨時間改變，所以我們在複數平面上，可以用一個複變數來代表此流體流動的速度

$$v = v1 + iv2,$$

其中 $v1$ 和 $v2$ 是速度在 x 軸和 y 軸方向上的分量，且 v 是正切於此流動物體中移動的質點路徑，如此的路徑稱爲此移動流體的流線. 我們可證明(請讀者自行參閱以下參考資料)在足夠的條件之下，對於給定的流體流動函數，存在一個可解析(微分)函數

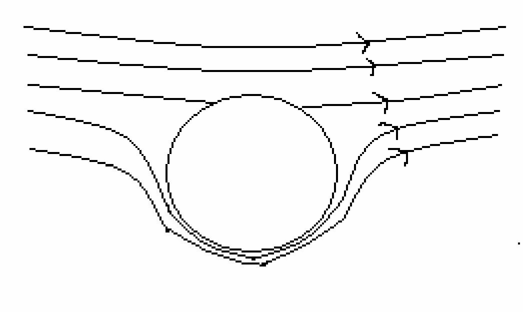
$$F(z) = F(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

稱爲此流體的複數位能，其速度爲

$$v = v1 + iv2 = \overline{F'(z)}.$$

要注意的是由於 $F(z)$ 是可解析的 所以 P 和 Q 都滿足 Laplace 方程式然而在靜電力學場中的邊界是等位線，但是流體力學當中，流體不能通過的邊界一定是一個流線. 我們來看一個圓柱體周圍的循環流動問題: 複數位能 $F(z) = z + \frac{1}{z} - ia\ln z$ 可得到一個流動會使得圓柱邊界 $|z| = 1$ 是一條流線，求出其速率並証明

$z = \frac{ia \pm \sqrt{-a^2 + 4}}{2}$ 速率會停止; 當 $a = 0$ 時 流體位於 ± 1; 當 a 增加時流體會沿著單位圓往上移動直到 $z = i$ 相會爲止(此時的 $a = 2$.) 當 $a > 2$ 時，數值告訴我們是在虛軸上，這是沒有任何物理上的實際意義的，因爲一個位於流動的場中，另一個在圓柱裡面.(參考以下的圖)



解: 流線是 $Q(x, y) =$ 常數，所以我們取 $F(z)$ 的虛部是 $y - \frac{y}{x^2 + y^2} - a\ln\sqrt{x^2 + y^2}$ 是常數. 當 $|z|$ 很大時 $F(z)$ 中的 $\frac{1}{z}$ 項的絕對值是很小很小的，所以對這 $F(z)$ 值，此流體流動會幾乎均勻的以平行 x 軸的方式流動.

$v=\overline{F'(z)}=|F'(z)|=|1-\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{ia}{z}|$. 因爲 $|z|\to\infty$ 時 $|v|\to 1$. 所以我們把此流體稱作半徑爲一單位圓柱體附近的流動. 當 $v=0$ 時, 我們有 $z^2-iaz-1=0$ 也就是 $z=\dfrac{ia\pm\sqrt{-a^2+4}}{2}$ 是速率停止的滯留點.

現在我們要解釋使用複數位能的好處:

1. 複數位能 $F(z)$ 的實部和虛部皆爲調和函數 2. 如果 $F(z)$ 的實部表示等位線, 那麼虛部則是等位線的正交曲線, 工程和物理上的應用有力學線, 電力線, 熱流動線和流動的流體等等同本質同計算問題.

參考書目:

1.高等數學教材第三卷第二分冊複變函數論 V.I. Smirnov 原著凡異數學譯.

2. Advanced Engineering Mathematics, Erwin Kreyszig 格致圖書公司.

3.高等工程數學習題及複習題詳解(第七版)曉原出版社.

4. Complex analysis, Serge Lang, New York :Springer-Verlag,c1985.

5. Complex analysis, Theodore W. Gamelin, New York :Springer,c2001.