利用的定理: 保角變換

我們來看複變函數論在靜電學中的應用, 我們知道兩個帶電點之間互相吸引或者是互相排斥的電力, 是由庫倫定律來決定, 此電力我們用靜電位能函數 P (gradient), 在等位面上 P 滿足 Laplace 方程式的解. 由於電力的方向與等位面互相垂直, 所以雖然是三度空間上的物理問題, 我們仍然可以把問題簡化到二度空間上, 靜電位能函數是和第三度空間座標無關的. 我們的問題是有兩個圓柱體分別爲 $A:|z|=1$ 具有位能 $U1=0$ 伏特和 $B:|z-0.4|=0.4$ 具有位能 $U2=120$ 伏特 之間的位能函數關係爲何?

解:要回答這問題之前, 我們先解決一個子問題.

子問題: 求兩個兩端無限延伸且位能分別保持爲 P_1 和 P_2 的導電圓柱之間的位能函數關係 P?

解: 因爲 P 是 Laplace 方程式的解 $\nabla^2 P=0$. 利用極座標轉換, 我們得到 Laplace 方程式爲 $rP''+P'=0$, 將變數分離 $\frac{P''}{P'}=-\frac{1}{r}$ 並積分它得到

$\ln P'=-\ln r+C$ 所以 $P'=\frac{C}{r}$, $P=C\ln r+D$, C,D 是常數, 由圓柱上的 P 電位來決定.

在保角變換下, 調和函數仍然轉換成調和函數, 所以我們可以用兩個步驟來解決比較複雜區域 E 中的 Laplace 方程式邊界值問題. 首先把 E 用保角 $w=f(z)$ 變換成比較簡單的區域 E^*, 使得此問題的解爲已知或者較容易得到, 接下來使用 $w=f(z)$ 把解 $F^*(w)$ 轉換到 E, 所以 $F(z)=F^*(f(z))$ 是我們的解決辦法, 現在可以回答我們的問題.

1. 我們利用線性轉換 $w=\frac{z-c}{\bar{c}z-1}$ 把 $A:|z|=1$ 轉換到 $B':|w|=r$. 由於 c 是實數, 所以我們有兩個自由參數 c,r , 加上邊界值 $0=0.4-0.4$ 和 $0.8=0.4+0.4$ 分別被轉換到 r 和 $-r$, (如果是 $-r$ 和 r, 則 r 是負數.) 所以 $\frac{0-c}{0-1}=r, \frac{0.8-c}{0.8c-1}=-r$, 整理後得到 $r^2-2.5r+1=0$. 因爲 $r<1$, 所以 $r=c=0.5$, 我們得到的線性轉換爲 $w=\frac{z-0.5}{0.5z-1}$.
2. 由子問題我們可以得到 $F^*(w)=C\ln w+D$. 帶入 $|w|=1, U1=0$ 和 $|w|=0.5, U2=120$ 邊界條件後, 我們得到 $C\ln 1+D=0 \Rightarrow D=0$ 和 $C\ln 0.5+D=120 \Rightarrow C=\frac{120}{\ln 0.5}$.

   所以我們可以得到解 $F(z)=\frac{120}{\ln 0.5}\ln\frac{z-0.5}{0.5z-1}$,

實際位能爲 $\operatorname{Re} F(z)=\frac{120}{\ln 0.5}\ln\left|\frac{z-0.5}{0.5z-1}\right|$.

參考書目:

1.高等數學教材第三卷第二分冊複變函數論 V.I. Smirnov 原著凡異數學譯.

2. Advanced Engineering Mathematics, Erwin Kreyszig 格致圖書公司.

3.高等工程數學及習題詳解(第七版)曉原出版社.

4. Complex analysis, Serge Lang, New York :Springer-Verlag,c1985.

5. Complex analysis, Theodore W. Gamelin, New York :Springer,c2001.