利用的定理: Poisson 積分公式, 傅立業(Fourier)級數
我們來看傅立業級數在靜電學中的應用, 我們知道 Laplace 方程式的 Dirichlet 問題可以使用 Poisson 公式來處理, 而實際的靜電問題也常出現這方面的應用.

我們舉一個例子: 單位圓上面邊界爲 $\begin{cases} -\pi<\theta<0 \text{時是 } -2 \\ 0<\theta<\pi \text{時是 } 2 \end{cases}$ 內的靜電位能函數

是 $F(r,\theta)=\dfrac{8}{\pi}(r\sin\theta+\dfrac{r^3}{3}\sin 3\theta+\dfrac{r^5}{5}\sin 5\theta+\cdots)$.

解: 關於靜電位能函數的定義, 讀者可自己參閱前面的例子.

由於 $\dfrac{z1+z}{z1-z}=\dfrac{1+(z/z1)}{1-(z/z1)}=(1+\dfrac{z}{z1})\sum_{n=0}^{\infty}(\dfrac{z}{z1})^n=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(\dfrac{z}{z1})^n$,

令 $z=re^{i\theta}, z1=\mathrm{Re}^{ix}$ 我們可以得到

$\mathrm{Re}(\dfrac{z}{z1})^n=\mathrm{Re}[\dfrac{r^n}{R^n}e^{in\theta}e^{-inx}]=(\dfrac{r}{R})^n\cos(n\theta-nx)$.

所以 $\mathrm{Re}[\dfrac{z1+z}{z1-z}]=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(\dfrac{r}{R})^n(\cos n\theta\cos nx+\sin n\theta\sin nx)$.

將此式子帶入 Poisson 積分公式

$F(r,\theta)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(y,x)\dfrac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-x)+r^2}dx$ 並且逐項績分後,

我們可以得到傅立業級數

$F(r,\theta)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\dfrac{r}{R})^n(c_n\cos n\theta+d_n\sin n\theta)$, 當中的係數關係

$c_0=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(R,x)dx$,

$c_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(R,x)\cos nxdx$, $d_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(R,x)\sin nxdx$.

帶入邊界值後, 我們可以得到 $F(r,\theta)$ 是一個奇函數, 所以 $c_0=c_n=0$ 和

$$d_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(R,x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}-\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}\sin nxdx]$$
$$=\frac{2}{\pi}[\frac{\cos nx}{n}|_{-\pi}^{0}+\frac{-\cos nx}{n}|_{0}^{\pi}]=\frac{2}{\pi}[\frac{1}{n}-\frac{\cos nx}{n}-\frac{\cos nx}{n}+\frac{1}{n}]$$
$$=\frac{4}{n}[\frac{1}{n}-\frac{1}{n}(-1)^n].$$

所以當 n 是偶數時 $d_n=0$, 當 n 是奇數時 $d_n=\dfrac{8}{n\pi}$, 因此我們可以得到

靜電位能函數是 $F(r,\theta)=\dfrac{8}{\pi}(r\sin\theta+\dfrac{r^3}{3}\sin 3\theta+\dfrac{r^5}{5}\sin 5\theta+\cdots).$

傅立業級數在工程學上面的應用極爲廣泛，讀者可自己參閱以下的書目.

參考書目:

1.高等數學教材第三卷第二分冊複變函數論 V.I. Smirnov 原著凡異數學譯.

2. Advanced Engineering Mathematics, Erwin Kreyszig 格致圖書公司.

3.高等工程數學及習題詳解(第七版)曉原出版社.

4. Complex analysis, Serge Lang, New York :Springer-Verlag,c1985.

5. Complex analysis, Theodore W. Gamelin, New York :Springer,c2001.