應數碩 97 羅琳峰

面面俱到

是否可用正六邊形去組成一球面呢？也許可以，那就動手做吧！但由數學證明這是不可能的事情。那麼是否能利用正五邊形與正六邊形搭配組合一球面呢？或是用其他正多邊形搭配呢？這些結構常發生在生物、化學、建築、運動等中。其實這類問題都可由方程組的解去觀察出它的可能性。現在我們就來考慮如何用正五邊形與正六邊形去組合一球面。

先來介紹幾個符號代表，

x：正五邊形個數　　　y：正六邊形個數

e：球面體的邊數　　　f：球面體的面數

v：球面體的頂點數

由觀察發現以上變數間有一些關聯，

1. $f = x + y$
2. $5x + 6y = 2e$（每個球面邊數為兩個多邊形共有）
3. $5x + 6y = 3v$（每個球面頂點數為三個多邊形共有）
4. $f + v = e + 2$ The Euler Theorem（由 Euler 發現）

$$\Rightarrow\begin{cases} x+y=f \\ 5x+6y=2e \\ 5x+6y=3v \\ f+v=e+2 \end{cases}\text{，轉成矩陣型態，}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -6 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e \\ f \\ v \\ x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

運用***高斯消去法***

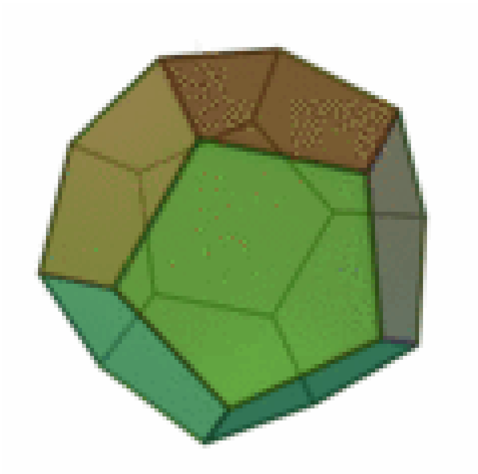
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -5 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -6 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & -5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -6 & 0 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & -6 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\begin{cases} e=3t+30 \\ f=t+12 \\ v=2t+20 \\ y=t, x=12 \end{cases}\text{，}t\in\mathbb{R}$$

雖然此方程組方程式數量 < 變數數量，此方程式有無限多組解，但唯一確定的是$x=12$。也就是說，此種球面體一定含有 12 個正五面體。

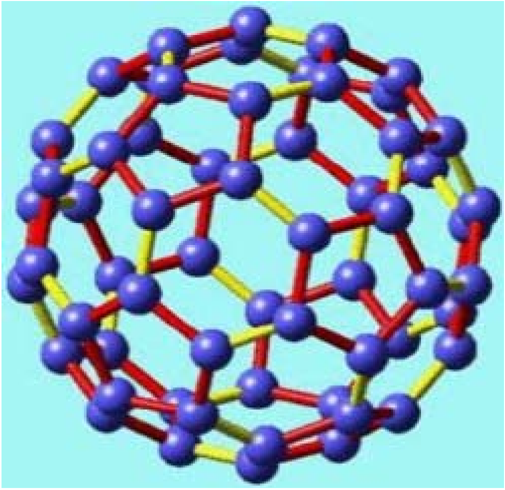
最後我們來欣賞

$$1.\begin{cases} x=12 \\ y=0 \end{cases}$$



正十二面體

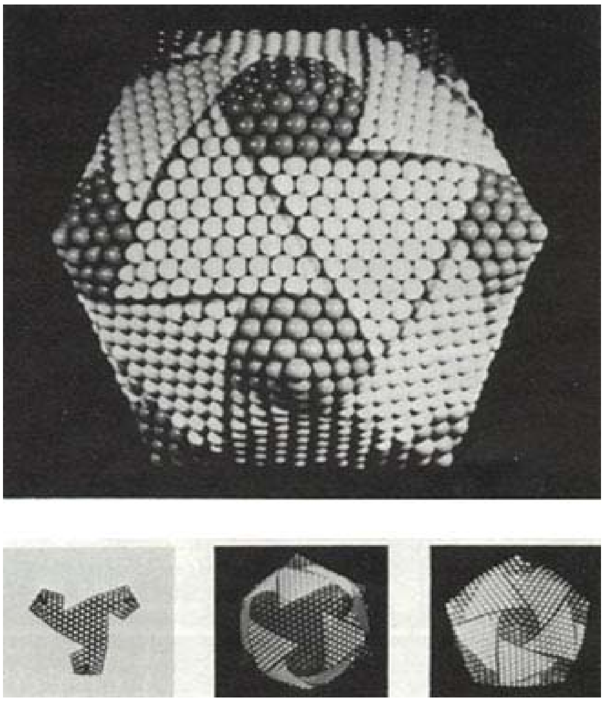
2. $\begin{cases} x = 12 \\ y = 20 \end{cases}$



C_{60}

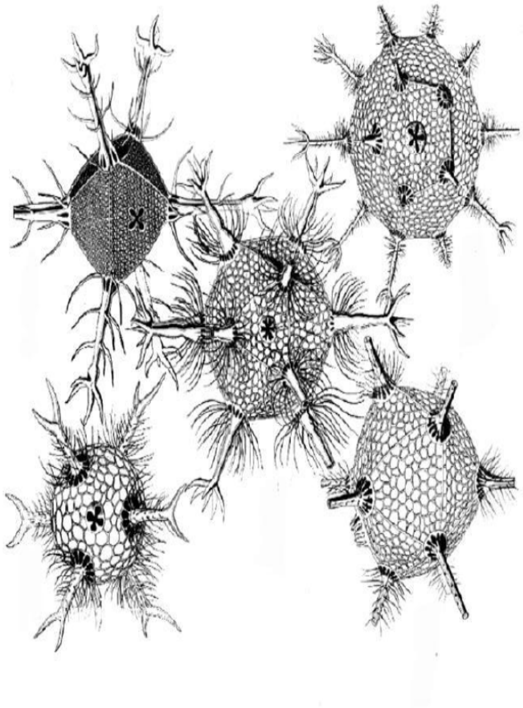
（圖形出自http://nano.nchc.org.tw/dictionary/c60.html）

以下是一些維生物架構



腺病毒

（圖形出自:http://www.kepu.net.cn/gb/lives/sars/edit/200305200048.html）



⇒ 正八面體

⇒ 正十二面體

⇒ 正二十面體

放射蟲的骨架

（圖形出自http://www.math.ncu.edu.tw/math/link/chern/euler.pdf）

參考書目：

1. Alain M.Robert, *Linear Algebra Example and Applications*, *World Scientific Publishing Co.* ,2005.

2. http://www.math.ncu.edu.tw/math/link/chern/euler.pdf