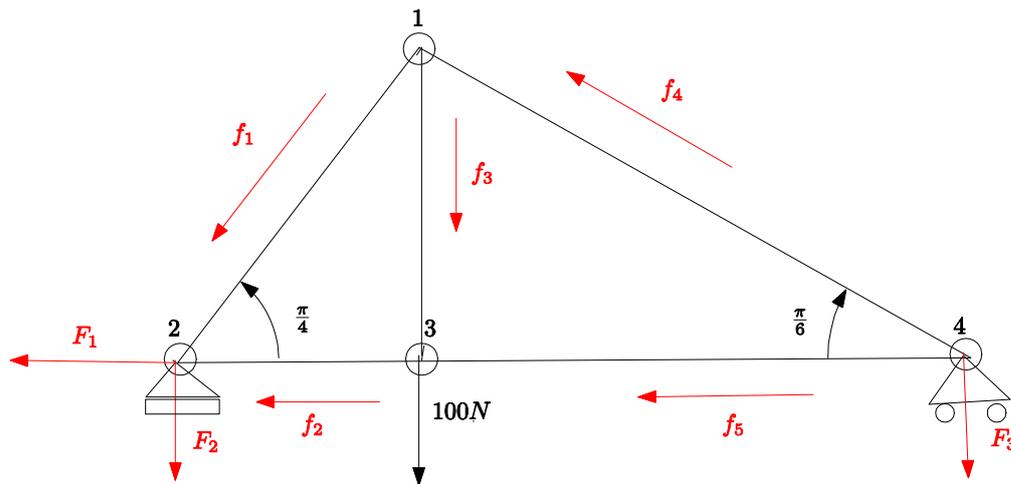


## 靜力平衡

我們以前常常在算靜力平衡的物理題目時，常常要解聯立線性方程組，因為以前的比較簡單，所以可以用手計算出答案，但當聯立方程組變得複雜的時候，用手計算卻要花很多的時間，而且在計算當中，也有可能發生計算錯誤。所以當複雜的時候我們可以利用電腦幫我們做計算，所以你必須寫出一個有關解聯立方程式的程式，我們可以利用我們所學的數值方法來幫助我們來撰寫這支程式。以下我會舉出一個例子，並且用其中一種數值方法來說明。

例子：

桁架



此結構左下角 2 點處固定，右下角 4 點處可以水平移動，而 1、2、3 和 4 為連接點，在接點 3 處承受 100N 的力，各接點的受力分別為

$f_1$ 、 $f_2$ 、 $f_3$ 、 $f_4$ 和 $f_5$ 。正值代表物件上承受張力，負值代表物件上承受壓力。

2 點的接點處固定支撐點，可同時承受水平分量( $F_1$ )和垂直分量( $F_2$ )，而 4 點處的接點處是可移動的支撐點，所以只會承受垂直分量( $F_3$ )。

若這個桁架式處於靜平衡狀態，則每個接點的受力的向量和為零。所以我們可以看圖所示，列出下列圖表：

接點	水平分量	垂直分量
1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}f_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_4 = 0$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}f_1 - f_3 - \frac{1}{2}f_4 = 0$
2	$-F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}f_1 + f_2 = 0$	$\frac{\sqrt{2}}{2}f_1 - F_2 = 0$
3	$-f_2 + f_5 = 0$	$f_3 - 100 = 0$
4	$-\frac{\sqrt{3}}{2}f_4 - f_5 = 0$	$\frac{1}{2}f_4 - F_3 = 0$

我們可以利用上面的資料，建構矩陣，

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & -1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

用 Jacobi' s Iteration Method 來解上面的聯立方程式。

1. 先把 $f_1$ 係數最大的，換到第一行，在看下面 7 行，找出 $f_2$ 係數最大

的，換到第二行，以此類推，我們就可以把上面的矩陣改變成下面的矩陣形式：

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 & -1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. 開始用 Jacobi's Iteration Method 來做運算，當誤差小於 $10^{-6}$ 時疊代停止。

3. 最後疊代共 90 次後，誤差小於 $10^{-6}$ 。

4. 最後疊代的答案為

$$f_1 = -88.55066391783242, \quad f_2 = 61.04940556149848, \quad f_3 = 100.0$$

$$f_4 = -74.7704501302595, \quad f_5 = 64.75310926520221,$$

$$F_1 = -3.703703703703731, \quad F_2 = -64.75310926520221$$

$$F_3 = -37.38522506512975。$$

所以我們學會數值方法，再把它撰寫出程式，把複雜的問題，讓電腦去計算。

參考資料：

1. 數值分析(Numerical Analysis) Richard L. Burden • J. Douglas Faires 著，江大成譯。