應數碩 97 林瑋玲

預測人口數

內插法，在很多地方都可以使用到它，例如：工程、金融和影像處理等各方面，所以是相當廣泛的被使用的。在我們在檢視一些數據後，可以利用一個與已知數據相符的函數來做預測，來做合理的估計。

例子：

美國每 10 年做一次人口調查。下表為 1940 到 1990 年之人口數，以千人為單位。

年	1940	1950	1960	1970	1980	1990
人口數（單位：千）	132,165	151,326	179,323	203,302	226,542	249,633

根據以上的數據，我們用 Lagrange polynomial 來預估在 1965 年和 2010 年的人口數。

以下我們先說明 Lagrange polynomial 的定理：

定理：

若 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 為 n+1 個相異數，且已知這些數所對應之 f 的函數值，則存在最高 n 次的多項式 $P(x)$，使得

$$f(x_k)=P(x_k), \quad \text{對每一 } k=0,1,\cdots,n$$

此多項式為

$$P(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, L_{n,k}(x)$$

其中，對每一 k=0, 1, . . . , n，

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$
$$= \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

當不會產生混淆時，我們將$L_{n,k}(x)$簡化記為$L_k(x)$。

我們將數據帶入以上的公式，就可以找出一個滿足那些數據的函數，去使我們去估計一些新的或舊的資訊，但是只有是用估計的，一定是會有誤差的。

$$L_0(x) = \frac{(\mathrm{x}-1950)(\mathrm{x}-1960)(\mathrm{x}-1970)(\mathrm{x}-1980)(\mathrm{x}-1990)}{(1940-1950)(1940-1960)(1940-1970)(1940-1980)(1940-1990)}$$

$$L_1(x) = \frac{(\mathrm{x}-1940)(\mathrm{x}-1960)(\mathrm{x}-1970)(\mathrm{x}-1980)(\mathrm{x}-1990)}{(1950-1940)(1950-1960)(1950-1970)(1950-1980)(1950-1990)}$$

就以上面的方式，再找$\mathrm{L}_2(\mathrm{x})$、$\mathrm{L}_3(\mathrm{x})$、$\mathrm{L}_4(\mathrm{x})$和$\mathrm{L}_5(\mathrm{x})$。

這樣就可以找出滿足這些數據的多項式

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + L_3(x)f(x_3)$$
$$+L_4(x)f(x_4) + L_5(x)f(x_5)。$$

我們估計 1985 年的人口數是 238696 千人，1965 年是 191767 千人。