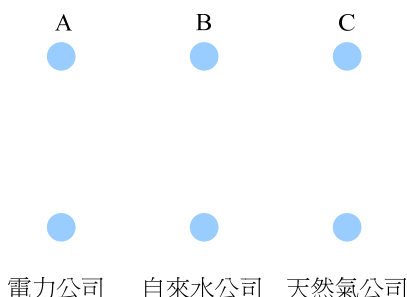


# 你家的管線被壓到了嗎？

## (平面圖問題)

趙怡茹(應數博 96)

假設現在有三個家庭現在要申請裝設電力、自來水以及天然氣。而且需要在同一個平面上架設管線，且埋設的管線皆不能重疊，則有可能可以完成此項工程嗎？我們將問題圖形化來看，有沒有可能由上面的點各連到下面的點，但線不能交錯？

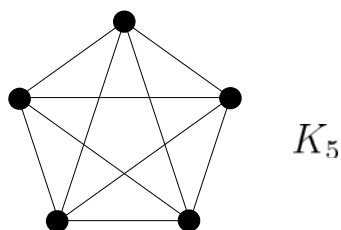


這個答案是——做不到！這就是圖論裡提到的——平面圖問題。

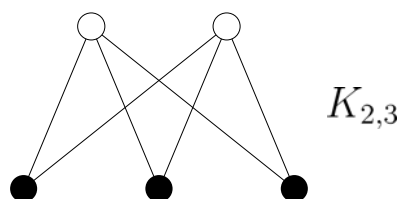
先定義一些名詞，然後再解釋原因會比較容易瞭解。我們所謂的平面圖(plane graph)即是此圖形的任何線都不相交；可平面化的圖(planar graph)即是此圖形可經過一些拉扯(變形)變成平面圖。

並且要回答這個問題前，我們先介紹下面兩種圖(graph)：

一、完全圖  $K_n$  (complete graph) —— 圖中有  $n$  個點，其任兩點有邊相連。



二、完全二部圖  $K_{m,n}$  (complete bipartite graph) —— 圖中有  $m$  個白點、 $n$  個黑點，假設異色點都有線相連，同色點均不相連。



我們再來看 1930 年由 Kuratowski 所提出關於平面圖的定理：舉凡在一個圖形中找不到子圖  $K_5$  及  $K_{3,3}$  的話，若且為若此圖形必可平面化。

另一方面由尤拉公式，“面(或區域)=線-點+2”，可得到一個推論：一個可平面

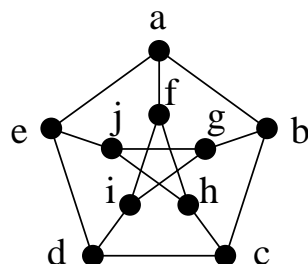
化圖形有三點以上，則其邊數跟點數的關係為

$$\text{“邊數} \leq 3 * \text{點數} - 6 \text{”} \dots\dots\dots (*)$$

由這個推論可以用來判斷一個圖形是否為不可平面化。

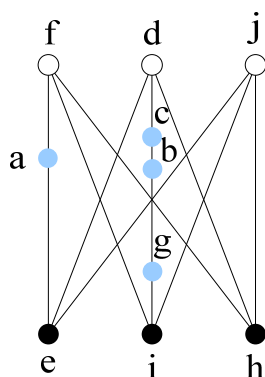
以這個例子來說，邊有 9 條、點有 10 個，因為不符合(\*)，所以這個例子為不可平面化。

例：問此圖形是否可平面化？



Ans：由(\*)並不能說明其不可平面化，因此找子圖。

發現這個圖有子圖  $K_{3,3}$  (如下圖)，因此由 Kuratowski 定理得知，這個圖不可平面化。



這種平面化的問題可用於 IC 晶片的線路設計，在製作 IC 晶片時，若 IC 裡面的 pin 跟 pin 做連接的線有交錯的話就會短路。因此在製作 IC 晶片時，不想讓那些線在晶片上有交錯，所以就利用平面化問題來解決！

[參考資料]

1. “計程車怎麼走比較快？玩具發明家的生活數學遊戲”，伊凡·莫斯科維奇 著，繆靜芬、黃柏瑄 譯，究竟出版社
2. “Applied Combinatorics 4ed”，Alan Tucker, 2002