

真假皇冠

有天，國王請金匠用純金打造了一頂王冠，做好了以後，國王懷疑金匠不老實，可能造假摻了「銀」在裡面，但是又不能把王冠毀壞來鑑定。怎樣才能檢驗王冠是不是純金的呢？阿基米德想了很久，一直沒有好方法。有一天，他在洗澡的時候發現，「溢出來的水的體積正好應該等於他身體的體積，所以只要拿與王冠等重量的金子，放到水裡，測出它的體積，看看它的體積是否與王冠的體積相同，如果王冠體積更大，這就表示其中造了假，摻了銀。」

後來阿基米德將這個發現進一步總結出浮力理論，並寫在他的《浮體論》著作裡，也就是：物體在流體中所受的浮力，等於物體所排開的流體的重量。阿基米德為流體靜力學建立了基本的原理。

相信這是個耳熟能詳的故事。這邊我們將利用**高等微積分**中的**散度(Stokes)定理**來證明阿基米德原理。

範例：

浮體的浮力為 $B = -\iint_S pn \, ds$ ，其中 p 為液壓。壓力 p 與液體密度

$\rho(x, y, z)$ 的關係式為液體境力學的法則：

$$\nabla p = \rho(x, y, z)g \text{ ,}$$

其中 g 為重力加速度。若物體的重量為 $W = mg$ ，證明阿基米德原理

$$B + W = 0 \text{ 。}$$

解析：

$$B + W = -\iint_s pn \, ds + mg \text{(*)}$$

由散度定理，若 f 為具有一階連續偏微分的純量函數，則

$$\iint_s fn \, ds = \iiint_D \nabla f \, dv.$$

$$\begin{aligned} (*) &= -\iiint_D \nabla p \, dv + mg \\ &= -\iiint_D \rho(x, y, z)g \, dv + mg \\ &= g(-\iiint_D \rho(x, y, z) \, dv + m) \\ &= g(-m + m) = 0 \end{aligned}$$

$\therefore B + W = 0$ ，我們即証明了阿基米德原理。

參考書目：

1. <http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E9%98%BF%E5%9F%BA%E7%B1%B3%E5%BE%97&variant=zh-tw>.
2. William R. Wade, *An Introduction to Analysis second Ed.*, Prentice-Hall. Inc, 2000.
3. Dennis G. Zill, Michael R. Cullen 著；黃孟糠，朱弘民，楊至誠編譯，Advanced Engineering Mathematics；工程數學，台中市 滄海，民96。